Theorie und Anwendung der Beschreibung dynamischer Systeme: Vom d'Alembertschen Prinzip bis zum Chaos

Fragestellung

Die Frage, die in dieser Arbeit gestellt wurde, war: Wie können komplexe, dynamische Systeme beschrieben werden?
Die Fragestellung kann in drei kleinere Fragen unterteilt werden, nämlich: Wie kann die Bewegungsgleichung effizient hergeleitet werden? Wie kann diese Bewegungsgleichung numerisch gelöst werden? Wie können die numerischen Resultate interpretiert werden?

Bewegungsgleichungen

Da sich die Bewegungsgleichungen nur sehr schwer mit der newtonschen Formulierung der klassischen Mechanik herleiten lassen, musste eine andere Formulierung, die Lagrange-Formulierung, hergeleitet werden. Damit konnte die Bewegungsgleichung hergeleitet werden:

$$\ddot{\gamma} = \frac{kl_0\left(M\sin(\gamma) + r_2\sin(\gamma-\theta)\right)}{r_1 m_1\sqrt{M^2 + 2M(r_2\cos(\theta) - r_1\cos(\gamma)) + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2\cos(\gamma-\theta)}} - \frac{Mk\sin(\gamma)}{r_1 m_1} - \frac{kr_2\sin(\gamma-\theta)}{r_1 m_1}$$

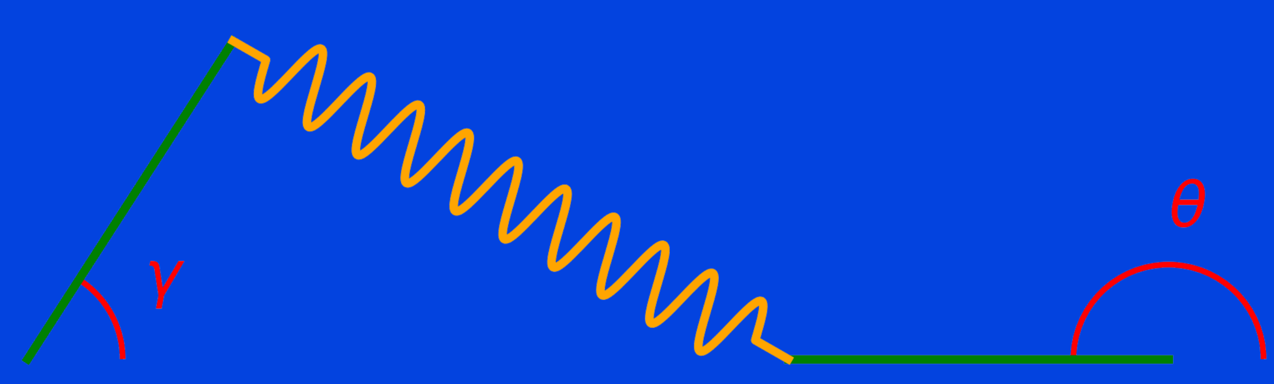
$$\ddot{\theta} = \frac{kl_0\left(-M\sin(\theta) + r_1\sin(\theta-\gamma)\right)}{r_2 m_2\sqrt{M^2 + 2M(r_2\cos(\theta) - r_1\cos(\gamma)) + r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2\cos(\gamma-\theta)}} + \frac{Mk\sin(\theta)}{r_2 m_2} + \frac{kr_1\sin(\gamma-\theta)}{r_2 m_2}$$

Analyse des Systems

Zur Darstellung der komplexen Bewegung wurden vier Möglichkeiten erklärt und auf das eigene System angewandt, nämlich: Phasendiagramme, Poincaré-Schnitte, maximale Lyapunow-Exponenten, Bifurkationsdiagramme. Mit diesen Methoden wurde untersucht, wie sich das System unter verschiedenen Anfangsbedingungen verhält. Es konnte gezeigt werden, dass das System bei steigendem Anfangswinkel einen Übergang von periodischem zu quasiperiodischem Verhalten vollzieht, bevor es erneut in ein periodisches Muster übergeht und schließlich chaotisches Verhalten aufweist.
Rechts sieht man die Phasendiagramme des Systems für verschiedene Anfangsbedingungen. Man erkennt den Übergang des Verhaltens von dem System. Im Hintergrund sieht man diesen Übergang in einem Bifurkationsdiagramm dargestellt.

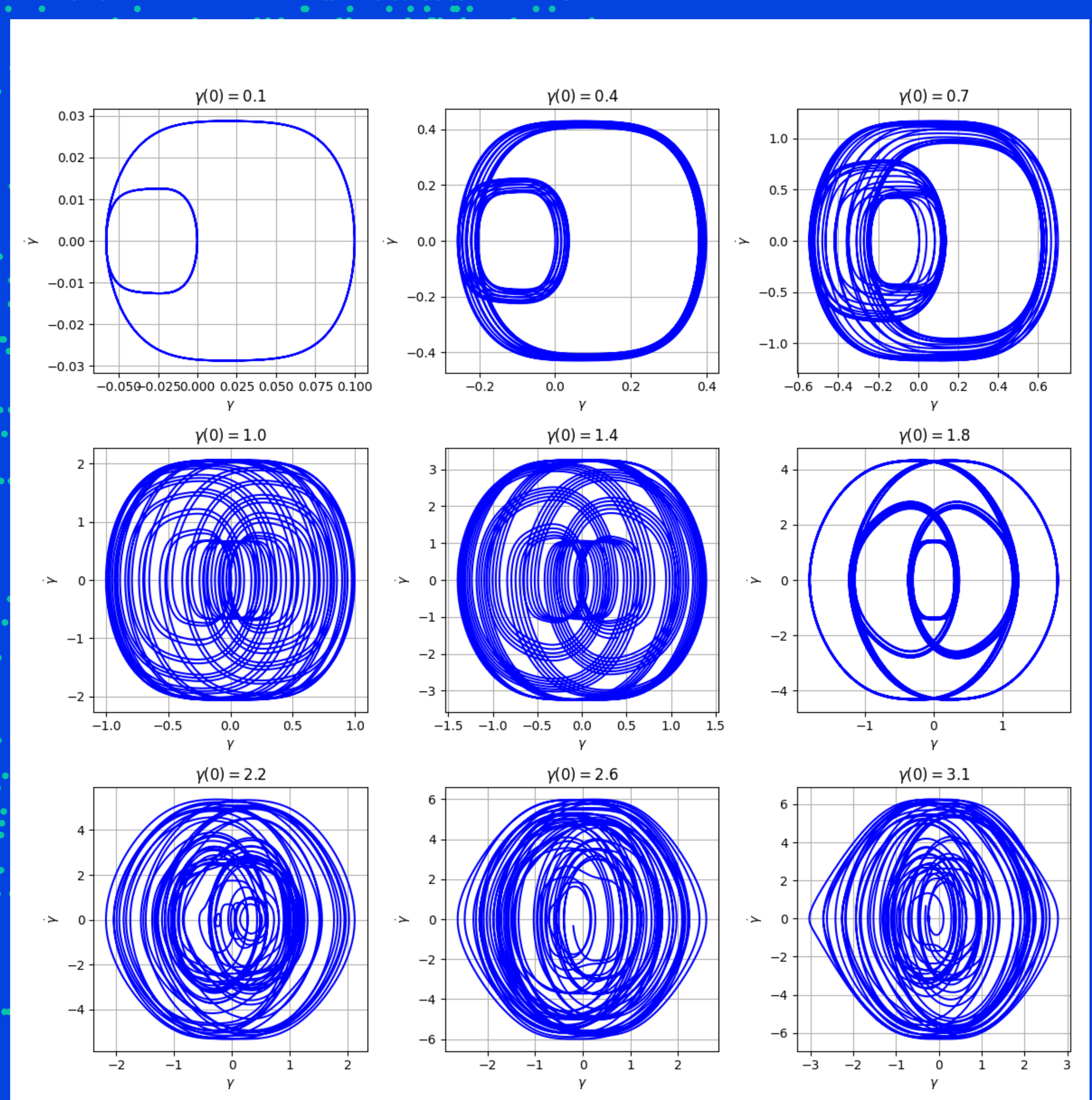
Das untersuchte System

Die beschriebenen Methoden wurden auf ein eigenes System, das gekoppelte, planare Federpendel (unten), angewandt. Bei diesem System sind zwei waagrecht liegende Pendel, mit einer Masse an ihren Enden, durch eine Feder verbunden.



Runge-Kutta-Verfahren

Da die Lösung der Bewegungsgleichungen nicht in geschlossener Form angegeben werden kann, müssen sie numerisch gelöst werden. Man unterteilt das Problem in Teilschritte und approximiert diese mit einem gewichteten Mittel der Bewegungsgleichungen. Um diese Gewichtungen optimal zu bestimmen, wird die Differenz der Taylorreihe der perfekten Lösung und des sogenannten Runge-Kutta-Ansatzes verglichen und minimiert.
Durch den Vergleich verschiedener Runge-Kutta-Verfahren konnte ein effizientes Verfahren für mein System gefunden werden.



Phasendiagramme für verschiedene Anfangsbedingungen

Verfasser: Leo Horber

Kantonsschule Enge

Betreuer: Erich Schurtenberger